2. Vordiplom
Mathematik III: Analysis
(D-ERDW)

Es wird nicht erwartet, dass Sie in der zur Verfügung stehenden Zeit alle Aufgaben vollständig lösen. Beachten Sie, dass die Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe oft unabhängig von einander gelöst werden können.

1. (4 Punkte)
In welchem Punkt des Bildes der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ ist die Tangentialebene an dieses Bild senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (5 Punkte)
Sei $f(x,y) = x^y$.

a) Geben Sie eine erste lineare Näherung für den Wert von $f(1.01, 4.98)$.

b) Verbessern Sie die Näherung unter Verwendung des Tangentialpolynoms 2. Grades.

3. (6 Punkte)
Sei $f(x,y) = xy^2 + \ln \frac{y}{x}$.

a) Bestimmen Sie von der Funktion f den Definitionsbereich, den Gradienten und die Richtungsableitung im Punkt $(\,-1\,,4\,)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) In welchem Punkt des Strahls $y = 4x$, $x < 0$, ist die Richtungsableitung in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ am kleinsten? Wie gross ist dieser Minimalwert?

Bitte wenden!

4. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ e^{uv} \end{pmatrix}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \ln z \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Ableitung dh der Funktion $h = g \circ f = g(f)$,

a) indem Sie h explizit darstellen und ableiten.

b) mit Hilfe der Kettenregel.

5. (5 Punkte)

a) Sei D das Dreieck mit den Ecken $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$. Berechnen Sie

$$\iint_D xydxdy.$$

b) Sei V der im 1. Quadrant liegende Viertel des Einheitskreises mit Zentrum im Ursprung. Berechnen Sie

$$\iint_V \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

6. (9 Punkte)

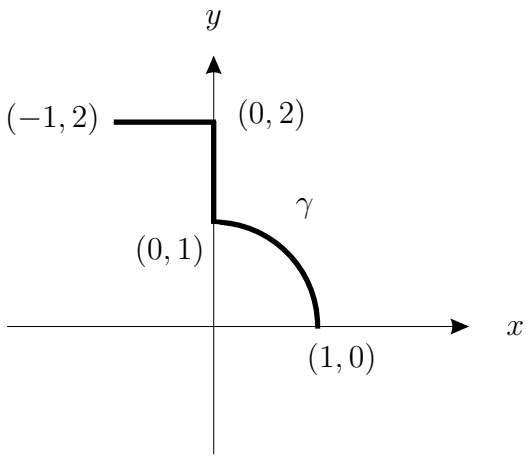
Seien

$$F_1(x,y) = \begin{pmatrix} -xy \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad F_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x+y} \\ \ln(x+y) + \frac{y}{x+y} \end{pmatrix}$$

zwei Vektorfelder.

a) Sind die Vektorfelder F_1 respektive F_2 wirbelfrei? Begründen Sie Ihre Antwort. Sind die Vektorfelder Potentialfelder? Geben Sie, wenn ja, eine Potentialfunktion, wenn nein, eine Begründung an.

b) Bestimmen Sie die Arbeit von beiden Vektorfeldern F_1 respektive F_2 längs des unten gezeichneten Wegs γ.

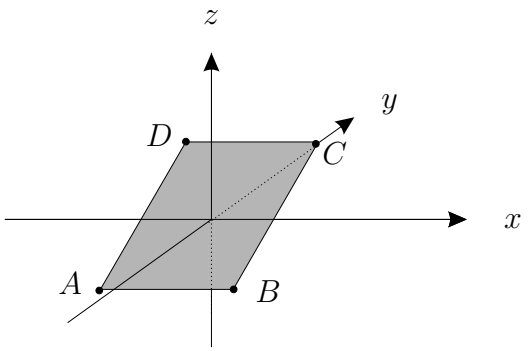


Siehe nächstes Blatt!

7. (10 Punkte)
Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x+y)+yz \\ x(z+1)+3y \\ y(x+1)+z \end{pmatrix}$$

und das Rechteck R mit den Ecken $A = (-1,-2,-2), B = (1,-2,-2), C = (1,2,2)$ und $D = (-1,2,2)$.



a) Berechnen Sie die Arbeit des Feldes F längs des Randes ∂R von R

- direkt,
- mit Hilfe des Satzes von Stokes.

b) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes F durch den Quader mit Mittelschnitt R und Höhe 2.